「学习总结」正睿 计数选讲

Jiayi Su (ShuYuMo)

2021-02-01 15:35:06

wzy 哥哥的一些有趣计数题 ~

例题壹

给定 n,m ，构造 n 堆石子，每堆石子的数量 $\in [1,2^m-1]$，每堆石子数目互不相同。求使得 Nim 先手必胜的构造方案数。

$n \le 10^7, m \le 10^9$ 模数：10^9+7

考虑直接后手必胜的情况，即长度为 n 的序列，异或和为 0。

设长度为 n 的方案数为 $f(n)$。能够得到如下递推式：

$$f(n) = (2^m-1)(2^m-2)(2^m-3)\cdots(2^m-n+1) - f(n-1) - (2^m-1)(i-1)f(n-2)$$

考虑到前 $(n-1)$ 位置个随意填上互不相同的值域为 $[1,2^m-1]$ 的数字。然后减去前面正好填出异或和为 0 的方案（因为最后一个位置还要填数字）（即：$f(n-1)$）。理论上，最后一个数字应该等于前面 $(n-1)$ 数字的异或和，但是可能不满足互不相同的条件，先枚举不合法的方案最后一个数字是什么，然后枚举和前面哪一个冲突，再乘上 $f(n-2)$。

例题贰

给出 n 个正整数 a_i，选出 n 个正整数 b_i ，n 个正整数 d_i，满足

$\forall i \in [1,n], d_i | b_i | a_i$，求有多少种选法满足 $\prod_i^n d_i^2 \ge \prod_{i=1}^n b_i$

$n \le 100, a_i \le 10^9$

对于任意一种方案 $\prod_{i=1}^n d_i^2 > \prod_{i=1}^n b_i$

试想把所有 d_i 取成 $\frac{b_i}{d_i}$，即：$\prod_{i=1}^n \frac{b_i^2}{d_i^2} > \prod_{i=1}^n b_i$

即：$\prod_{i=1}^n d_i^2 < \prod_{i=1}^n b_i$

所以其实 $\prod_{i=1}^n d_i^2 < \prod_{i=1}^n b_i$ 和 $\prod_{i=1}^n d_i^2 > \prod_{i=1}^n b_i$ 的方案是一一对应的。

只需要求出 $\prod_{i=1}^n d_i^2 = b_i$ 的方案数即可。这个可以对每一个质因子单独 dp。

例题叁

CF383D

n 个位置排成一排, 有 m 个人依次进场选位置, 每个人一开始选一个方向, 从左到右/从右到左, 并选择一个位置, 然后按照她选择的方向进入场地, 走到这个位置, 如果有人, 就继续按当前方向往后寻找, 知道找到一个空位坐下, 如果没有空位, 他就会生气.

为每个人确定一个方向和选择的位置。求没有人生气的方案数。

考虑把序列首尾之间连接一个点 $n+1$ 转化成一个环，相当于每个人选择一个位置，然后选择一个方向转圈，方案不合法，当且仅当有一个人占据了 $n+1$ 这个位置。

因为是一个环，所以任意一个位置都是等价的，所以任意一个位置有人的概率为 $(1-\frac{m}{n+1})$

答案就是 $(1-\frac{m}{n+1})2^m(n+1)^m$

例题肆

「杂题记录」「CTSC2017」吉夫特

例题伍

「杂题记录」括号序列（格路计数）

例题陆

一棵树，每条边的两个端点的大小关系给出，形如 $a_u > a_v$ 或者 $a_u < a_v$。求有多少种满足条件的排列 a 。$n \le 5000$

例题柒

给定一个字符串 S，仅包含 < 和 > 两种字符。

你需要计算「使得 $p_i < p_{i+1}$ 当且仅当 s_i 为 < 的排列 $p_1, p_2, \cdots p_{n+1}$ 」的数量。

可以发现，答案可能很大，因此你只要输出它对 998244353 取模的结果。

巧妙容斥。

先不考虑所有 > 的限制，只考虑 < 的限制，> 处的偏序关系任意，将一段 < 视为连续的一段，设每一连续的一段长度为 a_i ，这样的方案数就是 $\frac{n!}{\prod_i a_i!}$。

然后显然答案需要减去任意位置为 < 的情况，对这个 < 满足数量容斥即可。

考虑设 $f(n)$ 表示只考虑前 n 个数字方案数。

考虑 $f(n)$ 的答案和 $f(n-1)$ 的答案的差别，枚举最后一段有多长即可。

$$f(n) = \sum_{i=1}^{i-1} \frac{[S_j =' >']}{(i-j)!} f(i)(-1)^{cnt_{i-1}-cnt_j}$$

这东西可以分治 NTT 优化。

例题捌

n 阶 循环矩阵是一种形如：

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & a_2 \\ \vdots & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

的矩阵。

设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ 没必要拘泥于 a_i 的下标，取第一行依次排开即可，是等价的。

则：$\det(A) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} f(\omega_i)$

即 对于循环矩阵，有快速的求值方式。

LGV 引理

在一张 DAG 上，给定 n 个起点 $a_1,\cdots,a_n$ ，n 个终点 $b_1,\cdots,b_n$，求选出 n 条路径 (a_i,b_i) 互不相交（不经过同一个点）的方案数。

设 $f(a,b)$ 表示从 DAG 上从 a 走到 b 的方案数。

构造矩阵 C, 满足 $c_{a,b}=f(a,b)$。

LGV 引理指出，其方案数为：

$$\det(C)$$

考虑任意一个有交方案，都能够对应一种其他方案，对应奇偶排列，这些方案会被抵消。

栗题

Y 轴正半轴上有 n 个点 $(0,a_1),(0,a_2),\cdots,(0,a_n)$，他们每次可以向右或向下走一格，求最后分别走到 $(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)$ 的方案数。$n,a_i\le 10^6$

考虑这里的从 $(0,a_i)$ 到 $(j,0)$ 的方案数为 $\binom{a_i+j}{j}$

构造行列式为：

$$\begin{vmatrix}\binom{a_1+1}{1} & \cdots & \binom{a_1+n}{n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \binom{a_n+1}{1} & \cdots & \binom{a_n+n}{n}\end{vmatrix}$$

对于每一列 j 提出公因子 $\frac{1}{j!}$ ，得：

$$\frac{1}{1!\ 2!\cdots n!}\begin{vmatrix}(a_1+1)^{\underline{1}} & \cdots & (a_1+n)^{\underline{n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_n+1)^{\underline{1}} & \cdots & (a_n+1)^{\underline{n}}\end{vmatrix}$$

对每一行 i 提出公因子 (a_i+1) 得到：

$$\frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}{1!\ 2!\cdots n!}\begin{vmatrix}1 & \cdots & (a_1+n)^{\underline{n-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & (a_n+1)^{\underline{n-1}}\end{vmatrix}$$

类似于归纳法的消元方法，注意到每一列都是一系列形式相同的关于 a_i 的多项式，考虑可以用前面的每一列来消这一列，使得这一列 i 只剩下第 i 次项。

最后能得到一个范德蒙行列式，形如：

$$F=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

范德蒙行列式的值有如下结论：

$$\det(F)=\prod_{i<j}(a_j-a_i)$$

注意按照归纳法推导过程，不难发现其实应该会推导出一个 αF 的形式，但是这里的 α 的值为 1 ，可以忽略。

可以考虑枚举差值 k ，计算有多少对数字差值为 k。

记 g_i 表示有多少 a 等于 i，构造 g_i 的生成函数 $G(x)$。

易知：$[x^k]\sum\limits_{i=k} g_i g_{i-k}$ 就是所求。复杂度为 $\mathcal{O}(a_i \log a_i)$。